Bemerkung über die Transformation der Laplaceschen Gleichung.

Von **Gerhard Kowalewski** in Prag.

Wir verstehen unter x, y, z rechtwinklige cartesische Koordinaten und betrachten die infinitesimale Transformation

$$Xf = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Gehen wir zu einem anderen rechtwinkligen Achsensystem über, so bewahrt Xf bekanntlich seine Form.

Wie ändert sich nun Xf, wenn wir zu beliebigen orthogonalen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ übergehen?

Um das zu erkennen, nehmen wir drei Achsen $P\xi$, $P\eta$, $P\zeta$ zu Hilfe, die im Punkte P die Koordinatenlinien berühren. Die ξ-Achse berührt die $\mathfrak{x}$-Linie, d. h. die Koordinatenlinie, längs welcher $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ konstant sind. Entsprechendes gilt von den beiden anderen Achsen.

Dann ist zunächst, weil es sich um ein rechtwinkliges Achsensystem handelt,

$$Xf = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}.$$

Andrerseits hat man aber an der Stelle P

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \mathfrak{x}},\quad \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{y}},\quad \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \mathfrak{z}},$$

und es ist dort offenbar

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathfrak{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{x}}\right)^2} = A,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{y}}\right)^2} = B,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \mathfrak{z}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{z}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{z}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{z}}\right)^2} = C.$$

Wir können also schreiben

$$Xf = A^{-2}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{x}}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + B^{-2}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{y}}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + C^{-2}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{z}}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

und wissen jetzt, wie sich Xf in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ausdrückt.

Eine infinitesimale Transformation

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial f}{\partial z}$$

erteilt einem Volumelement v bekanntlich das Inkrement

$$\delta v = v\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\delta t \qquad (*)$$

und dem Produkt

$$\omega(x,y,z)\,v$$

das Inkrement

$$\delta(\omega v)=\omega v\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\delta t+v\left(\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x}+\beta\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)\delta t.$$

Es ist also

$$\delta(\omega v)=v\left\{\frac{\partial(\omega\alpha)}{\partial x}+\frac{\partial(\omega\beta)}{\partial y}+\frac{\partial(\omega\gamma)}{\partial z}\right\}\delta t. \qquad (**)$$

Wenden wir (*) auf Xf an, so ergibt sich, daß

$$\frac{\delta v}{v\,\delta t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta_2\varphi \qquad (\dagger)$$

ist.

Um auch (**) anwenden zu können, betrachten wir für einen Augenblick ξ, η, ζ als rechtwinklige cartesische Koordinaten in einem neuen Raume. Dem Volumelement v des alten Raumes entspricht dann ein Volumelement $\mathfrak{v}$ des neuen Raumes und beide stehen bekanntlich in der Beziehung

$$v=\begin{pmatrix}x & y & z\\ \xi & \eta & \zeta\end{pmatrix}.\mathfrak{v}=D\,.\,\mathfrak{v}.$$

Nun ist nach (**)

$$\frac{\delta v}{\mathfrak{v}\,\delta t}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(A^{-2}D\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B^{-2}D\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(C^{-2}D\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right), \qquad (\dagger\dagger)$$

Aus (†) und (††) ergibt sich jetzt die bekannte Formel

$$\Delta_2\varphi=\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(A^{-2}D\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B^{-2}D\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(C^{-2}D\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right),$$

die ausführlich geschrieben, so lautet:

$$\Delta_2\varphi=D^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2}+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^2}\right\}.$$